						TOPLAM

ADI SOYADI:

NUMARA : **24.01.2020**

İST.157 MATEMATİK I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

SORU:1 $\lim_{X\to 2}\frac{X^4-16}{X-2}$ =?

SORU:2 $\lim_{X\to -1}\frac{\sqrt{X^2+8}-3}{X+1}$ =?

SORU:3 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}\right)^x$

SORU:4 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right)$

SORU:5 $f(x)=\begin{cases} 3-x\ , & x<2 \\ 2\ , & x=2 \\ \frac{x}{2}\ , & x>2 \end{cases}$ fonksiyonunu $x=1$ ve $x=2$ noktalarında süreklilik durumunu inceleyiniz? Eğer bu noktalarda süreksizlik durumu varsa, süreksizlik türü nedir?

SORU:6 $z\in\mathbb{C}$ olmak üzere $z^3=8$ kompleks denkleminin köklerini bulunuz? (**Y.G:** $Z_k=\sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]\ ,k=0\ ,1\ ,2\ ,\dots\ ,(n-1)$)

SORU:7 a bir sabit sayı olmak üzere bir f- fonksiyonu

$f(x)=\begin{cases} 2cosx\ , & x\geq\frac{\pi}{4}\ ise \\ ax^2+2\ , & x<\frac{\pi}{4}\ ise \end{cases}$ şeklinde tanımlanıyor. f- fonksiyonunu $x=\frac{\pi}{4}$ noktasında sürekli yapan a değerini bulunuz? **(15P)**

SORU:8 $f(x)=x^3+x$ fonksiyonunun $A=[0\ ,+\infty)$ aralığında monotonluk durumunu inceleyiniz?

SORU:9 Türev tanımını kullanarak $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz?

SORU:10 $f(x)=\begin{cases} \frac{|x-2|}{x}\ , & x\neq 2 \\ 0\ , & x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x_0=2$ noktasında türevinin olup olmadığını araştırınız? Varsa bulunuz?

NOT: Herhangi 6 soru seçilerek cevaplandırılacaktır. **Başarılar dilerim**

Doç. Dr. Yüksel ÖNER

<u>İST.157 MATEMATİK I BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI</u>

<u>24.01.2020</u>

<u>Cevap:1</u> $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2} \to \frac{0}{0}$, belirsizliği mevcuttur. Pay ve payda da ortak çarpan aranır.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4) = 32$ bulunur.

<u>Cevap:2</u> $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \to \frac{0}{0}$, belirsizliği mevcuttur. Pay ve payda payın eşleniği ile çarpılır.

$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+8-9)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} \to \frac{0}{0}$
belirsizliği devam ediyor, pay ve payda da ortak çarpan aranır.

$= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{(\sqrt{x^2+8}+3)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ bulunur.

<u>Cevap:3</u> $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}\right)^x \to 1^\infty$ belirsizliği mevcuttur. " $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$ kuralı uygulanır.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^2+4x+3-x^2}{x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x}{x^2}\right)} = e^4$ bulunur.

<u>Cevap:4</u> $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right) \to \infty-\infty$, belirsizliği mevcut. Limiti hesaplanacak olan fonksiyonun eşleniği ile fonksiyonu bir çarpıp bir de bölelim.

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x+1}-x)(\sqrt{x^2+5x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+5x+1}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5x+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+5x+1}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(5x+1)}{(\sqrt{x^2+5x+1}+x)}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{5}{2}$ bulunur.

<u>Cevap:5</u> $f(x) = \begin{cases} 3-x\ , & x<2 \\ 2\ , & x=2 \\ \frac{x}{2}\ , & x>2 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin. $x=1$ noktasında süreklilik durumunu inceleyelim. $x=1<2$ olduğundan bu noktada fonksiyon tanımlıdır ve $f(x)=3-x$ dir. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3-x) = 3-1 = 2$ ve $f(1)=(3-1)=2$ olup, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$ dir. Bu sebeple verilen fonksiyon $x=1$ noktasında süreklidir.

$x=2$ noktasında süreklilik durumunu inceleyelim. Önce bu noktada limitin varlığını araştıralım. $x=2$ noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken fonksiyon tanımlaması değiştiğinden öncelikle sağ ve sol taraflı limitlere bakmalıyız.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ ve $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3-x) = (3-2) = 1$ olup, sağ ve sol limitler birbirine eşit olduğundan $x=2$ noktasında fonksiyonun limiti vardır ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ dir. Ayrıca

$f(2) = 2$ olduğundan $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq f(2)$ olmaktadır, yani verilen fonksiyon $x = 2$ noktasında süreksizdir. Süreksizlik türü ise kaldırılabilir süreksizliktir.

<u>Cevap:6</u> $z \in \mathbb{C}$, $z^3 = 8$ kompleks denklemi veriliyor. Bu denkleme göre $n = 3$ ve $w = x + iy = 8 = 8(1 + i.0)$ olup, $x = 8$ ve $y = 0$ dır. Böylece; $\rho = |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{64} = 8$ ve $\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{0}{8}\right) = 0^0$ dir. Böylece denklemin k-ncı kökü;

$Z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[3]{8}\left[cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1), n = 3$ ile bulunur. Buna göre;

$k = 0$ için; $Z_0 = \sqrt[3]{8}[cos(0) + isin(0)] = 2$

$k = 1$ için $Z_1 = \sqrt[3]{8}\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$

$k = 2$ için $Z_2 = \sqrt[3]{8}\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\,i$

elde edilir.

<u>Cevap:7</u> $f(x) = \begin{cases} 2cosx \ , & x \geq \frac{\pi}{4} \\ ax^2 + 2 \ , & x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ için $D(f) = IR$ dir. $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında sürekli olabilmesi için $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4})$ olmalıdır. Önce $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ limitine bakalım.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} (2cosx) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} (ax^2 + 2) = a\frac{\pi^2}{16} + 2$ olup, verilen fonksiyonun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında limitinin olması için sağ sol limitler birbirine eşit olmalıdır. Bu sebeple $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) \Rightarrow \sqrt{2} = a\frac{\pi^2}{16} + 2 \Rightarrow a\frac{\pi^2}{16} = \sqrt{2} - 2 \Rightarrow a = \frac{16(\sqrt{2}-2)}{\pi^2}$ olarak bulunur. Buna göre verilen fonksiyonun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında sürekli olabilmesi için $a = \frac{16(\sqrt{2}-2)}{\pi^2}$ olmalıdır.

<u>Cevap:8</u> $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonu ve $A = [0, +\infty)$ aralığı verilsin. Keyfi $x_1, x_2 \in A$ seçelim ve $x_1 < x_2$ olsun. Bu takdirde $x_1^3 < x_2^3$ ve böylece $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ olur ki, bu da verilen fonksiyonun A kümesi üzerinde monoton artan olması demektir.

<u>Cevap:9</u> $f(x) = e^{-x}$ için $D(f) = IR$ dir. $x \in D(f)$ noktasında değişken artışı $\Delta x \neq 0$ olsun. Buna karşılık fonksiyon artışı ise;

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = e^{-(x+\Delta x)} - e^{-x} = e^{-x}(e^{-\Delta x} - 1)$ olup, fonksiyonun türevi türev tanımına göre;

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-x}(e^{-\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^{-x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{-\Delta x}-1)}{\Delta x} \to \frac{0}{0}$, belirsizliği mevcuttur. "$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ kuralı uygulanır. Bunun için $u = e^{-\Delta x}$ dersek, $\Delta x \to 0$ iken $u \to 0$ olacağından

$f'(x) = e^{-x} \lim_{u \to 0} \frac{(e^{u}-1)}{-u} = -\,e^{-x} \lim_{u \to 0} \frac{(e^{u}-1)}{u} = -\,e^{-x} * 1 = -e^{-x}$ olarak bulunur.

Cevap:10 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x} & , \ x \neq 2 \\ 0 & , \ x = 2 \end{cases}$, fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasında türevinin olması için, fonksiyonun bu noktada sağ ve sol taraflı türevleri var ve birbirlerine eşit olmalıdır. Buna göre sağ ve sol taraflı türevlere bakalım. $|x-2| = \begin{cases} x-2 & , \ x > 2 \\ 0 & , \ x = 2 \\ -(x-2) & , \ x < 2 \end{cases}$ ve böylece $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & , \ x > 2 \\ 0 & , \ x = 2 \\ -\frac{x-2}{x} & , \ x < 2 \end{cases}$ dir.

Sağ taraflı türev:

$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{x-2}{x}-0}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ iken,

Sol taraflı türev:

$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-\frac{x-2}{x}-0}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$ dir. $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan verilen fonksiyonun $x_0 = 2$ noktasında türevi yoktur.